

¿CUÁNTO MIDE LA COSTA DE ANDALUCÍA?

Introducción y una aplicación práctica de la geometría fractal

Álvaro Blanca Hoyos, Abdeslam Bounaaja Najdi, Juan Manuel del Valle Blanco, María Díaz Expósito
Nicolás Guillén Escalona

IES Fuengirola nº 1, Camino de Santiago nº 3, CP 29640. Fuengirola (Málaga)

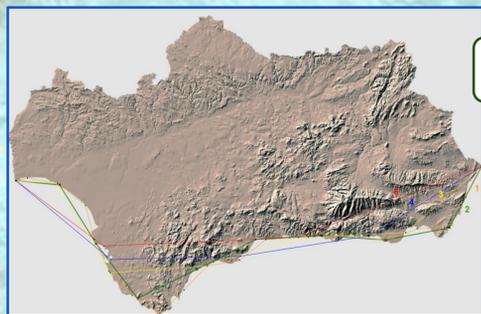
www.iesfuengirola1.net



fractaliesf1.wix.com/costa-andalucia

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

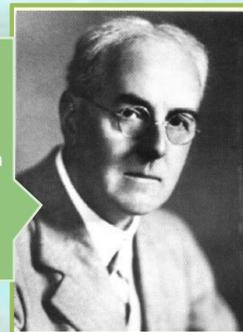
En esta investigación averiguamos la longitud del litoral de Andalucía, ya que existen distintos valores proporcionados por diversas fuentes fiables consultadas. Estas fuentes no muestran el procedimiento, siendo éste uno de nuestros objetivos.



PARADOJA DE LA LINEA DE COSTA

La longitud depende de la unidad de longitud u considerada.

Lewis Fry Richardson (1881-1953) fue un matemático y pacifista británico. Sus investigaciones sobre longitud de fronteras y costas indican una relación del tipo $L(u) = k \cdot u^{-D}$, observando que la relación $\log(L) - \log(u)$ es de tipo lineal.



Benoît Mandelbrot (1924-2010), matemático creador de la geometría fractal.
"Un fractal es un tipo de objeto geométrico fragmentado que puede ser subdividido en partes, cada una de las cuales es (aproximadamente) una copia reducida del total."

Por otro lado, dicha longitud depende proporcionalmente de la unidad de longitud considerada (u). Benoît Mandelbrot interpretó el significado de "D".

$$d = 1 + D$$

Dimensión fractal

FRACTALES

Las características de un objeto fractal son:

- Es irregular como para ser descrito en términos geométricos clásicos (puntos, rectas, planos)
- Posee detalles en cualquier escala donde lo observemos.
- Es autosemejante o autosimilar, es decir, se observa exactamente, o de manera aproximada, el mismo objeto a diferentes escalas.
- Se pueden obtener, de manera exacta o aproximada, mediante un algoritmo recursivo

Estas figuras cumplen la relación $N(r) = r^{-d}$, siendo $r = 1/2$ d indica la dimensión donde se encuentra el objeto

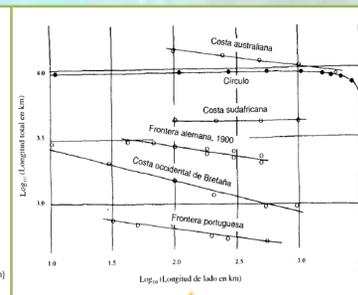
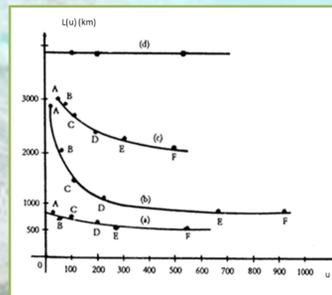
$d = 1$ (recta)

$d = 2$ (plano)

$d = 3$ (espacio)

$$N(u) = r^{-d}$$

$$d = \frac{\log(\text{objeto autosimilares})}{\log(\text{factor de escala})}$$



$$L(u) = u \cdot N(u) = k \cdot u^{-D}$$

$$N(u) = k \cdot u^{-d}$$

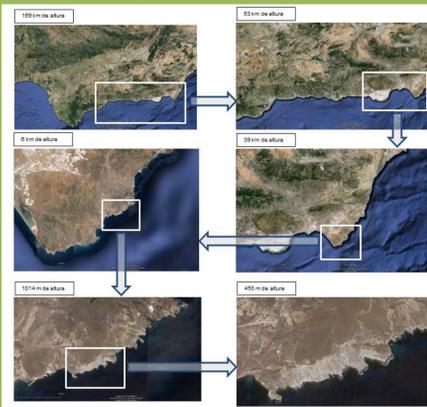
En esta gráfica se aprecia la dependencia lineal:
a) Frontera entre Portugal y España, b) Costa occidental de Gran Bretaña, c) Frontera terrestre de Alemania (1900) y d) Longitud de una circunferencia.

CURVA DE KOCH

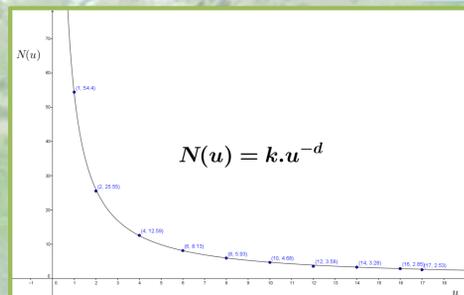
Esta figura se trata de la curva de Koch, en la cual $N(r) = r^{-d}$ cuando $r = 1/3$ y $d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26$

COSTA DE ANDALUCÍA

La costa andaluza se puede considerar un fractal porque partes de ella muestran propiedades estadísticamente similares en diversas escalas, autosimilitud estadística pudiendo considerar la dimensión fractal como una magnitud cuyo valor nos da información de cuánto "llena" o "coloniza" un objeto el espacio de dimensión entera superior donde se encuentra.



Imágenes obtenidas de Google Earth (del satélite Landsat y fotografías aéreas)



MÉTODO BOX-COUNTING

El método de box-counting recubre el objeto con cuadrados cuya relación entre los lados tiene un factor de escala $r = 2^z$ (z nº entero positivo).

Este método proporciona una forma de determinar la dimensión fractal de un objeto ya que considera la relación entre la escala de una forma autosimilar y el número de veces que aparece dentro del objeto del cual queremos obtener su dimensión fractal. Usamos un software llamado FrakOut!

La longitud de costa de Andalucía se puede estimar de dos formas:

MÉTODO DE RICHARDSON

Tomando medidas sobre un mapa a escala de la costa de Andalucía, podemos establecer una correlación entre el logaritmo de la unidad de longitud tomada y el de las veces que aparece ésta. Fijándonos en la expresión $L(u) = k \cdot u^{1-d}$, podemos obtener la dimensión fractal.

DIAGRAMA DE DISPERSIÓN

$\log(u) - \log(N(u))$

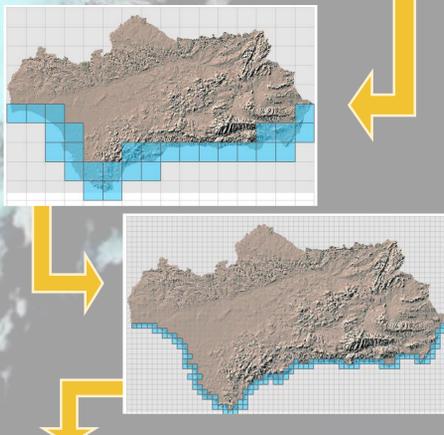
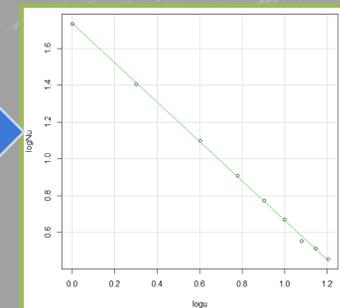
Regresión lineal casi perfecta

$R^2 = 0.99$

Recta de regresión:

$$\log N(u) = 1.735985 - 1.069875 \log(u)$$

(Usamos software libre R-Commander)



Método de Richardson o de unidad de medida			Método box-counting o de conteo por cajas		
Unidad de medida a escala u (cm)	Unidad de medida real u (m)	Longitud estimada a escala $L(u)$ (cm)	Unidad de medida a escala u (cm)	Unidad de medida real u (m)	Longitud estimada real $L(u)$ (km)
1	12600	12.6	54.4484	686.04984	54.6986
2	25200	25.2	51.87410913	653.613775	51.50326552
5	63000	63	48.65691762	613.077162	47.56392171
10	126000	126	46.35644429	584.0912057	44.78537456
20	252000	252	44.16473728	556.4756897	42.16914213
0.5	6300	6.3	57.15044195	720.0956686	58.09217749
0.25	3150	3.15	59.98657473	755.8308416	61.69629727
0.05	630	0.63	67.12659115	845.7950485	70.95085864
0.01	126	0.126	75.11646163	946.4674166	81.59362173
0.00794	$u=100.04$ m	0.100044	76.3370134	$L(u)=961.8463688$ km	83.24454778
0.005	63	0.063	78.84471137	993.4365592	86.65580392
0.0025	31.5	0.0315	82.75687144	1042.73658	101.863129
0.0026	32.76	0.03276	82.53038281	1039.882823	92.03205095
0.001	12.6	0.0126	88.22874918	1111.68224	91.7912972
0.00079	9.954	0.009954	89.69400764	1130.144496	99.65433853
					101.7152976

Provincias	Longitud costa (1)	L. Costa sin infraest.(2)
Almería	274.946	226.198
Cádiz	382.517	299.911
Granada	84.275	77.042
Málaga	212.554	172.336
Huelva	146.644	142.415
Total	1.100.936	917.902

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(r^{-1})} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\log N}{\log(2^z)}$$

Dimensión (fractal) de capacidad

$d \approx 1.08684 \approx 1.09$
Dimensión fractal de la costa de Andalucía (método box-counting)

CONCLUSIÓN

$d \approx 1.069875 \approx 1.07$
Dimensión fractal de la costa de Andalucía (método de Richardson)

Aceptamos como más precisos los valores obtenidos por el método box-counting, concluyendo que, con una unidad de longitud de 100 m, la longitud de la costa de Andalucía es de 1050 km aproximadamente, siendo éste un valor cercano al proporcionado por el Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía.

