EL INCONMENSURABLE π Y EL MÉTODO DE « EXHAUCIÓN»

Álvaro Blanca Hoyos, Abdeslam Bounaaja Najdi, Juan Manuel del Valle Blanco, María Díaz Expósito
Profesor coordinador: Nicolás Guillén Escalona

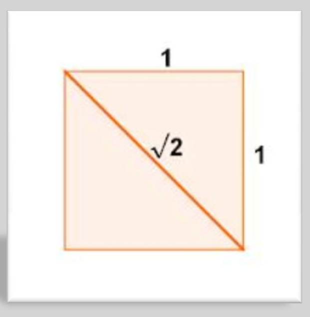
IES Fuengirola nº 1, Camino de Santiago nº 3, CP 29640. Fuengirola (Málaga)

www.iesfuengirola1.net   eudoxo-iesf1.wikispaces.com

CONTEXTO HISTÓRICO

El descubrimiento, por parte de *«Los Pitagóricos»*, de los *«inconmensurables»* (irracionales), supuso una auténtica crisis de fundamentos en la matemática de la época (s. V a. C.) ya que se creía que toda magnitud era finita y se podía expresar mediante una razón o proporción entre números enteros.

Por ejemplo: la diagonal de un cuadrado es un número *«inconmensurable»*

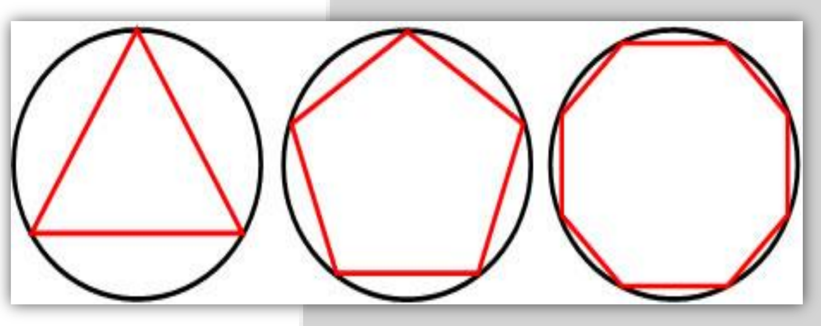


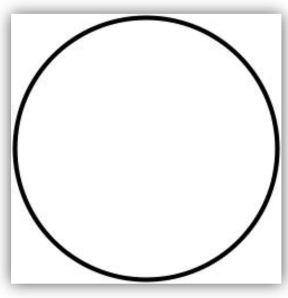
Durante el s. IV a. C., **Eudoxo de Cnido** (apróx. 390-337 a.C.), un destacado miembro de la Academia de Platón, dio una solución aceptable a la crisis ideando *«La teoría de las proporciones»* y el llamado *método de «exhaución»*.
La idea principal surge de que *«toda magnitud finita puede ser agotada mediante la substracción de una cantidad determinada»*.

Arquímedes de Siracusa (s. III a.C.), usando la idea de Eudoxo y la ya conocida obra de Euclides, *«Elementos de Geometría»*, consiguió una aproximación del número π muy aceptable. Estamos hablando de una época donde no se conocía el Álgebra y se carecía de una notación adecuada como la que actualmente existe y usamos con naturalidad.

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE «EXHAUCIÓN»

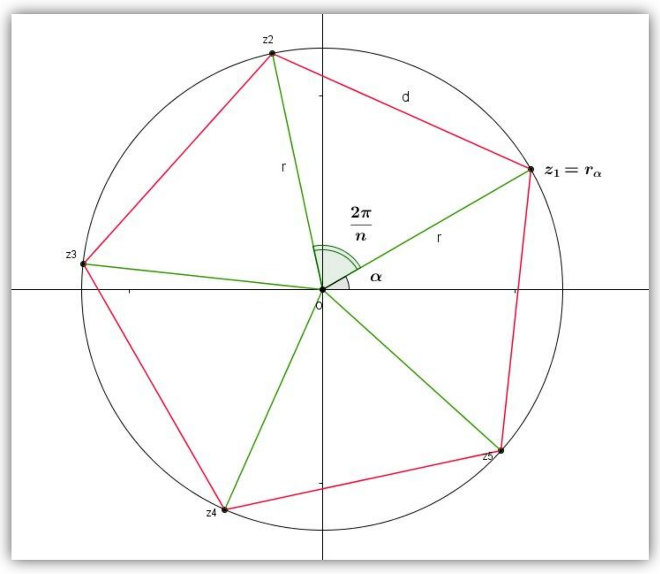
Si queremos conocer la longitud de una circunferencia, o el área de un círculo, podemos aproximarnos *«tanto como queramos»* a dichas magnitudes a partir de polígonos regulares inscritos, o circunscritos, a la circunferencia.





¿CÓMO OBTENER LOS VÉRTICES DE POLÍGONOS REGULARES?

Gracias a los números complejos y conociendo el módulo y el argumento de uno de los vértices, podemos obtener el resto de vértices del polígono multiplicándolo de la siguiente forma:

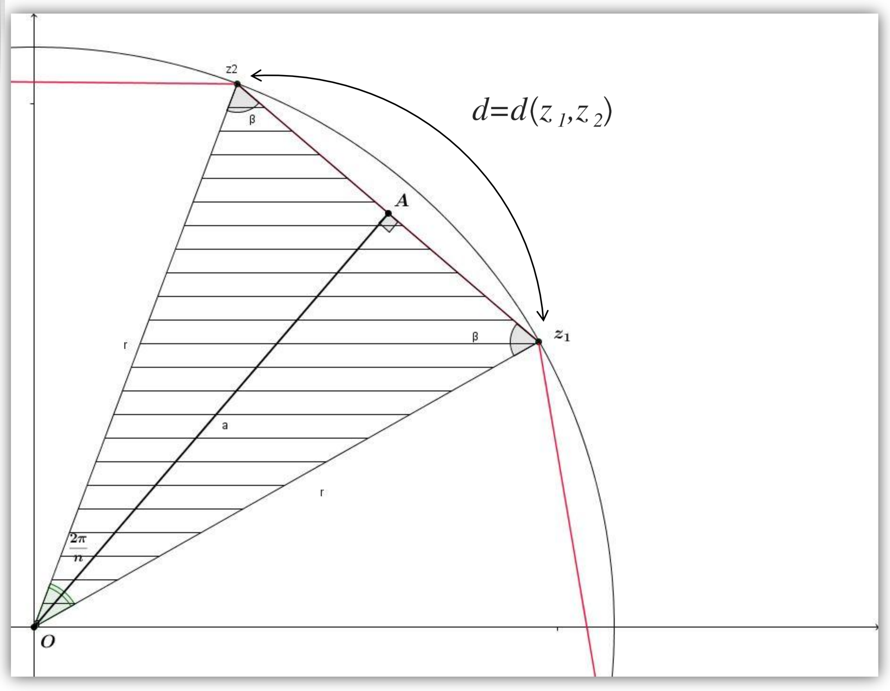


$$z_2 = z_1 . 1_{\frac{2\pi}{n}}$$

Así se vería representado de forma gráfica.

¿CÓMO PODRÍAMOS CONSEGUIR EL PERÍMETRO Y EL ÁREA DE CUALQUIER POLÍGONO REGULAR?

Para averiguar el perímetro y el área de un polígono debemos de obtener el valor del lado. Para ello utilizamos el teorema del coseno con vértices en el centro y dos vértices consecutivos del polígono.



$$d = 2r.sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

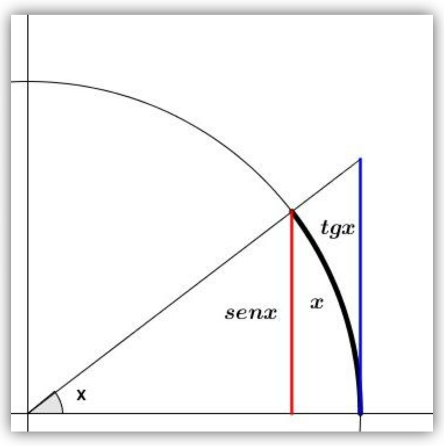
Si multiplicamos por el numero de lados del polígono (*n*), obtenemos la expresión del perímetro.

$$P_n = n.d = n.2r.sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Calculando el apotema *«a»* podemos obtener la expresión del área:

$$A_n = n.\frac{d.a}{2} = n.\frac{r^2}{2}.sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

¿TIENEN ALGÚN LÍMITE P_n Y LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA?



Observando la gráfica de la izquierda, podemos concluir que:

$$sen\ x \leq x \leq tg\ x$$

$$1 \geq \frac{sen\ x}{x} \geq cos\ x$$

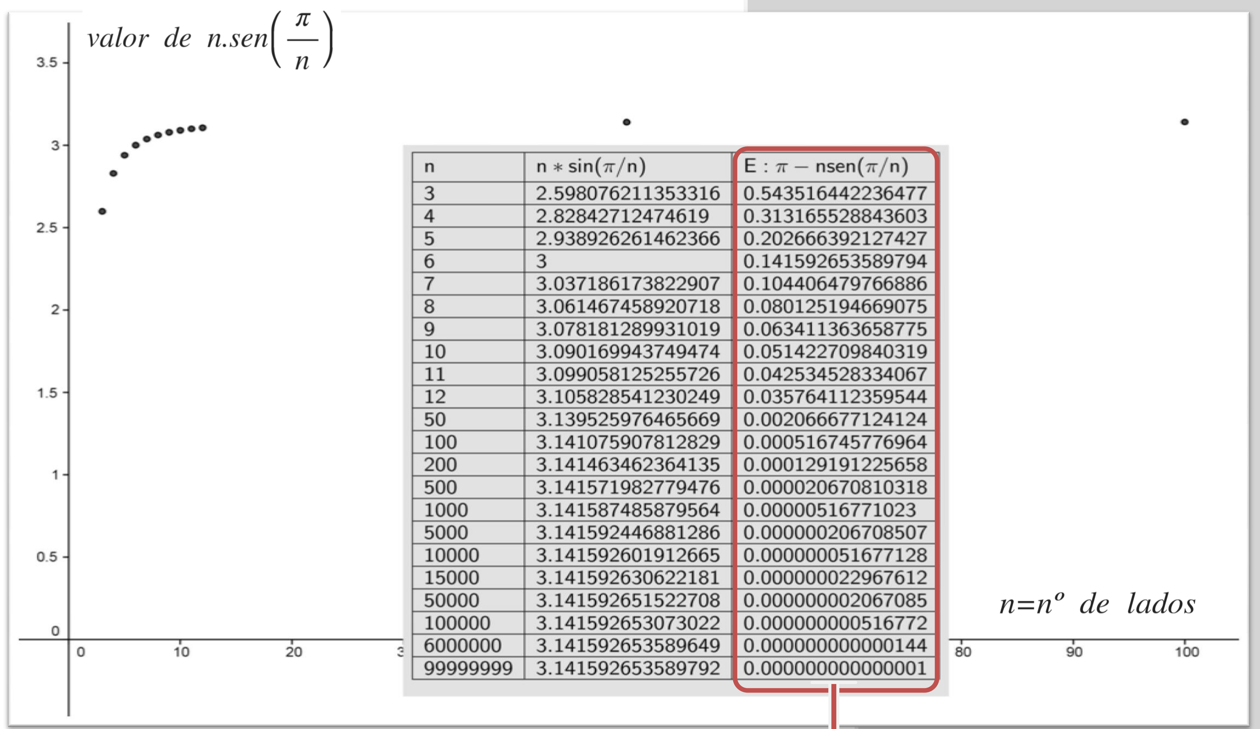
Si realizamos algunas operaciones y hacemos el cambio $x = \frac{\pi}{n}$

$$1 \geq \frac{sen\ \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \geq cos\ \frac{\pi}{n}$$

$$1$$

$$\lim_{n\to+\infty} n.sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$$

Si consideramos P_n como una sucesión, se puede inferir que el límite de la expresión $\left\{n.sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$ es π; ya que con ella podemos acercarnos a π cometiendo un ***error tan pequeño como queramos***.



n	n ∗ sin(π/n)	E : π − nsen(π/n)
3	2.598076211353316	0.543516442236477
4	2.82842712474619	0.313165528843603
5	2.938926261462366	0.202666392127427
6	3	0.141592653589794
7	3.037186173822907	0.104406479766886
8	3.061467458920718	0.080125194669075
9	3.078181289931019	0.063411363658775
10	3.090169943749474	0.051422709840319
11	3.099058125255726	0.042534528334067
12	3.105828541230249	0.035764112359544
50	3.139525976465669	0.002066677124124
100	3.141075907812829	0.000516745776964
200	3.141463462364135	0.000129191225658
500	3.141571982779476	0.000020670810318
1000	3.141587485879564	0.00000516771023
5000	3.141592446881286	0.000000206708507
10000	3.141592601912665	0.000000051677128
15000	3.141592630622181	0.000000022967612
50000	3.141592651522708	0.000000002067085
100000	3.141592653073022	0.000000000516772
6000000	3.141592653589649	0.000000000000144
99999999	3.141592653589792	0.000000000000001

¿QUÉ PASARÁ SI AUMENTAMOS EL VALOR DE «*n*»?

En esta gráfica podemos apreciar como los valores de la sucesión:

$$\left\{n.sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

se van aproximando a un valor concreto.

¿NO OS RESULTA FAMILIAR?

Por lo que podemos concluir:

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = 2\pi r \rightarrow Longitud\ de\ la\ circunferencia$$

De igual forma, con A_n:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \pi r^2 \rightarrow Área\ del\ círculo$$